

10 дәріс. Тақырыбы: Векторлардың векторлық және аралас көбейтіндісі.

Векторлардың векторлық көбейтіндісі, аралас көбейтіндісі және олардың геометрия мен механика салаларындағы қолданулары. Қасиеттері.

Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Анықтама 1. \vec{a} векторының \vec{b} векторына векторлық көбейтіндісі деп төмендегі теңдіктерді қанағаттандыратын $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}; \vec{b}]$ векторын айтамыз:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha$, $\alpha = \left(\hat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$,
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
3. \vec{c} векторының бағыты \vec{c} векторының ұшынан қарағанда \vec{a} векторынан \vec{b} векторына дейінгі жақын ара қашықтық сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы болатындай \vec{a} және \vec{b} векторларынан құралған жазықтыққа қарай бағытталған.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері

1. Егер $\vec{a} \parallel \vec{b}$, онда $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4. $m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b})$.

Векторлық көбейтіндінің координаталық формадағы өрнектелуін табалық. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ болсын. Онда

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ екенін ескерсек:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1)$$

аламыз.

Е с к е р т у . Векторларды векторлық көбейтудің көмегімен мыналар анықталады:

1. Векторлардың коллинеарлығы

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0, \text{ немесе } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad \left(R_2 : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} \right), \quad (2)$$

2. \vec{a} және \vec{b} векторларынан құрылған параллелограммның ауданы

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \quad (3)$$

Мысал 1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын тап. Мұндағы $\mathbf{i} (1, 0)$, $\mathbf{j}(0, 1)$ - бірлік векторлар және өзара перпендикуляр векторлар.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) * (\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} * \mathbf{i} + 3\mathbf{j} * \mathbf{i} - 8\mathbf{i} * \mathbf{j} - 12\mathbf{j} * \mathbf{j} = -3\mathbf{i} * \mathbf{j} - 8\mathbf{i} * \mathbf{j} = -11\mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{c};$$

$$\text{Спар.} = |\mathbf{c}| = 11|\mathbf{i} * \mathbf{j}| = 11 * 1 * 1 \sin \pi / 2 = 11.$$

Мысал 2. $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ және $\mathbf{b} = (2, -1, 3)$ векторлары берілген. Осы векторлардың векторлық көбейтіндісі мен векторлық көбейтіндісінен пайда болған вектордың ұзындығын тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{k} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c}(3, 0, -2), |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} * \mathbf{b}| = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}.$$

Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама 2. \vec{a}, \vec{b} және \vec{c} векторларының аралас көбейтіндісі деп $\vec{a} \times \vec{b}$ және \vec{c} векторларының скаляр көбейтіндісіне тең санды айтамыз, ол координаталық формада былай жазылады:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ болғандықтан, аралас көбейтіндіні былай белгілейміз: $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелипедті қарастыралық. Онда $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, ал $h = n p_{\vec{d}} \vec{c}$, мұндағы $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, және $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| n p_{\vec{d}} \vec{c}$ болғандықтан $V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|$.

Е с к е р т у . Аралас көбейтіндінің көмегімен мыналар анықталады:

1. Үш вектордың компланарлығы

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларынан тұрғызылған параллелипедтің көлемі

$$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| \quad (5)$$

Мысал 3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ векторлары компланар екендігін көрсет.

Шешуі:

Егер $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланар болса, онда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 14 - 5 - 7 + 4 - 10 = 0.$$

Ендеше, \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} векторлары компланар.

Мысал 4. Пирамиданың төбелері берілген:
 $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 2)$, $D(3, 0, -2)$.

Табу керек:

1. BAC бұрышын.
2. ABC үшбұрышының ауданын.
3. Пирамида көлемін.

Шешуі:

\overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} векторларын табалық:

$$\overline{AB} = (0-1, -1-2, 1-3) = (-1, -3, -2), \quad \overline{AC} = (1, 3, -1), \quad \overline{AD} = (2, -2, -5)$$

$$1. \cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{-1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = 9\bar{i} - 3\bar{j} = (9, -3, 0)$$

$$2. S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{81 + 9} = \frac{9\sqrt{10}}{2}.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 24.$$

$$3. V_{nup.} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$